

La rumeur



Objectifs

- analyser une expérience et en concevoir une simulation
 - estimer une probabilité et une moyenne
 - confronter des résultats de simulation à une formule
 - calculer des probabilités
-

Quatre amis habitent « aux quatre coins d'une île » en Polynésie, et chaque jour, deux d'entre eux se rencontrent au centre Internet de l'île : le couple qui se rencontre est déterminé au hasard parmi les six couples possibles de ces 4 amis.

Une de ces quatre personnes décide de faire courir une rumeur extravagante et la transmet dès le premier jour à l'ami qu'il rencontre au centre Internet. Ensuite, chaque jour, si une personne du groupe d'amis, qui connaît la rumeur, rencontre un autre membre du groupe qui ne la connaît pas, il lui en fait part.

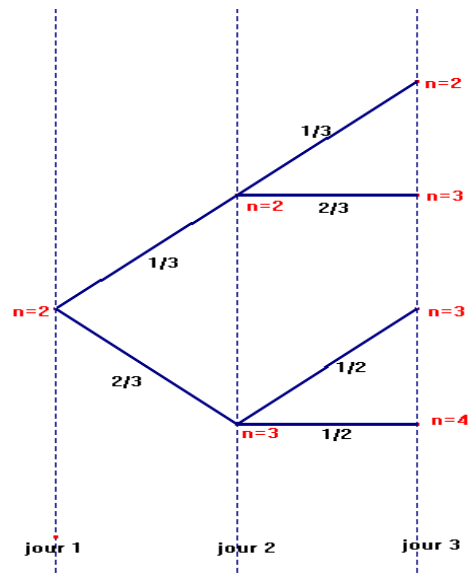
- 1- En moyenne, combien faudra-t-il de jour pour que les 4 amis connaissent la rumeur ?
- 2- Quelle est la probabilité qu'au bout de 4 jours, les 4 amis connaissent la rumeur ?
- 3- Si un jour donné, n amis connaissent la rumeur, $n=2,3$, quelle est la probabilité que le jour suivant $n+1$ la connaissent ?

Chaque élève pourra concevoir et mettre en œuvre entre 5 simulations de trajectoire de la rumeur en utilisant la touche *random* de sa calculatrice ou un tableur (voir annexe 1). Il en déduira une estimation grossière des nombres demandés. Les résultats des simulations de toute la classe seront mis en commun et une nouvelle estimation sera donnée.

Ensuite, le professeur donnera les résultats théoriques obtenus par le calcul des probabilités : les élèves pourront comparer (voir annexe 2).

Remarques :

A partir de la question 3, on peut demander la probabilité qu'au bout de 3 jours les 4 amis soient au courant, en travaillant sur un arbre débutant au premier jour.



Ce thème peut être l'occasion de réfléchir sur la nécessité d'utiliser une calculatrice ou un tableur pour choisir des nombres au hasard (voir l'article « choisir au hasard » sur ce site : <http://www.statistix.fr/spip/spip.php?article50>).

Annexe 1

Le professeur peut par exemple faire remplir par les élèves la feuille ci-dessous : les colonnes Ami 1 et Ami 2 sont remplies par des choix au hasard d'entiers entre 1 et 4 (calculatrice ou tableur) ; les deux dernières colonnes sont remplies manuellement. Les lignes pour lesquelles Ami1=Ami2 ne seront pas prises en compte.

Ami 1	Ami 2	Numéro de la partie	Jour	Initiés
1	4	1	1	14
4	4			
2	3	1	2	14
4	2	1	3	142
3	2	1	4	1234
4	2	2	1	42
4	1	2	2	142
2	4	2	3	142
2	2			
1	2	2	4	142
1	3	2	5	1234
3	2	3	1	32
2	1	3	2	123
1	4	3	3	1234

Annexe 2 (pour les enseignants).

-S'il y a N amis, on démontre que le temps moyen μ_N pour que la rumeur soit connue d'eux tous est donné par la formule :

$$\mu_N = \frac{N(N-1)}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k(N-k)}$$

N	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_N	3	5.5	8.3	11.4	14.7	18.15	21.7	25.5

-Pour 4 amis, on trouvera ci-dessous des valeurs approchées des probabilités p_n pour qu'au n -ème jour, les 4 personnes aient entendu la rumeur (ces approximations sont faites à partir d'un calcul et non à partir de simulations).

n	3	4	5	6	7
p_n	0,33	0.61	0.79	0.89	0.94

La probabilité qu'en 4 jours, les 4 amis connaissent la rumeur est 0,61.