

A propos de la comparaison de deux séries de mesures

Complément au diaporama : bonbon mentos et coca cola.

A l'usage de ceux qui n'ont pas fait de statistique.

Nous traitons ici d'une situation classique : on a deux séries de mesures. Les mesures d'une même série sont issues de la répétition d'une expérience, et entre les deux séries, on a modifié un facteur dont on cherche à tester s'il a un effet ou non sur les résultats.

Suffit-il pour conclure à l'effet en question de comparer les moyennes de ces deux séries de mesures ?

I- L'exemple du bonbon mentos dans une bouteille de coca cola

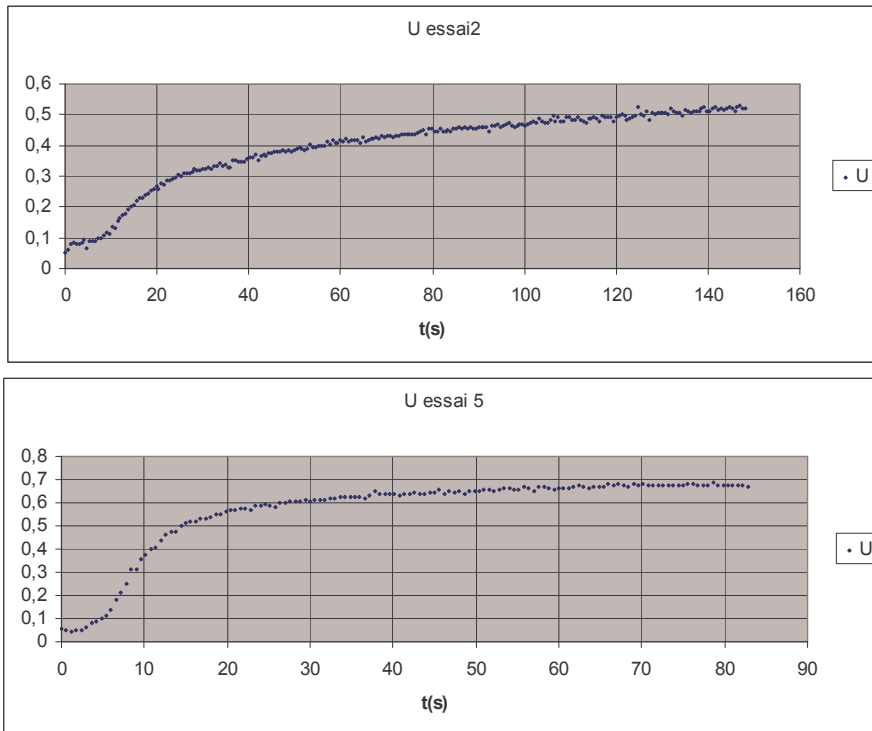
Si on met un bonbon mentos dans une bouteille de coca cola et qu'on referme rapidement, on constate une effervescence importante, qui dans certains cas fait sauter le bouchon de la bouteille. Une légende urbaine s'est construite sur ce sujet, au printemps 2009, via internet.

On peut ici s'interroger sur la nature de la réaction d'effervescence du coca cola. Est-elle purement chimique comme dans le cas du vinaigre sur du calcaire ? Où est-elle plutôt physico-chimique : le simple contact avec le bonbon permettrait de libérer le gaz carbonique contenu dans le coca cola ?

Nous souhaitons mettre à l'épreuve des faits l'hypothèse que la réaction est liée à la quantité de surface de contact entre la boisson et l'objet inséré dans la bouteille, et plus précisément que pour un même matériau, la réaction serait d'autant plus marquée que la surface des objets mis en contact avec le liquide est plus grande.

► Pour tester une telle hypothèse, il convient avant tout d'avoir une mesure de l'effet *effervescence* observé.

Une première expérience a été menée dans une classe de première. Après avoir versé un bonbon mentos par bouteille de coca cola, on a mesuré dans plusieurs bouteilles l'évolution de la surpression induite. Il apparaît qu'après une phase de montée de la surpression, celle-ci se stabilise (figures 1). Il a été décidé de mesurer l'intensité de l'interaction entre un objet et le coca cola par la mesure de la surpression stabilisée. Comme toute mesure, celle-ci est entachée d'incertitude, et de plus, même pour des expériences issues de la mise en œuvre du même protocole (bouteilles remplies à la même hauteur, même température, etc.), la surpression stabilisée reste variable.



Figures 1 : Evolution de la surpression dans deux bouteilles de coca cola où on a versé un bonbon mentos. L'unité en ordonnée est un multiple de l'hPa (hecto pascal).

► On peut maintenant tester l'influence de la surface de contact sur la surpression due au dégagement de CO₂. Dans les vidéos (voir documents joints) faites avec des cailloux et du gros sable issu de la même roche (voir photo ci-dessous), ou avec un sucre en morceau et un autre sucre de la même boîte, réduit en poudre, l'effervescence est visiblement plus conséquente lorsque le matériel est en « petit morceau ». Mais une seule expérience ne suffit pas : l'intensité de l'effervescence est variable, la différence peut être due aux contenants, au versement ou simplement à la variabilité propre du phénomène.



Imaginons qu'on dispose de mesures de la surpression stabilisée dans le cas d'un morceau de sucre et d'autres mesures de la surpression stabilisée dans le cas des mêmes morceaux de sucre, ceux-ci ayant été au préalable réduits en poudre. On pourrait évidemment comparer les moyennes des séries de mesures (dites moyennes empiriques) ; mais les moyennes varient d'une série d'expériences à l'autre (c'est la fluctuation d'échantillonnage), qu'il y ait ou non

un effet de la granulométrie. A partir de quel seuil décrète-t-on que la différence observée des moyennes n'est pas simplement imputable à la fluctuation d'échantillonnage ?

Nous allons réfléchir à cette question, à partir de simulations.

II- Quelques simulations

Quittons mentos et coca cola et simulons des données. Pour ceux qui connaissent, nous avons plus précisément choisi de simuler des distributions de Gauss, encore appelées distribution normales, (ou lois de Gauss, ou lois normales).

Dans le tableau 1, on présente des résultats de deux séries de 10 simulations avec le même modèle, à savoir la loi $N(200,30)$ (la moyenne théorique est 200 et l'écart-type théorique est 30). Les moyennes empiriques (208,8 et 201,4) sur ces deux séries de 10 simulations diffèrent de 7,4 unités et on est ici certain que la différence est imputable à la seule fluctuation d'échantillonnage - puisqu'on est parti d'un modèle unique.

	Exp1	Exp2
Moy.	208,8	201,4
Dév. Std	28,4	27,1
Nombre	10	10
Minimum	171,0	156,9
Maximum	258,2	254,4
Médiane	207,8	204,0

Tableau 1 : simulations

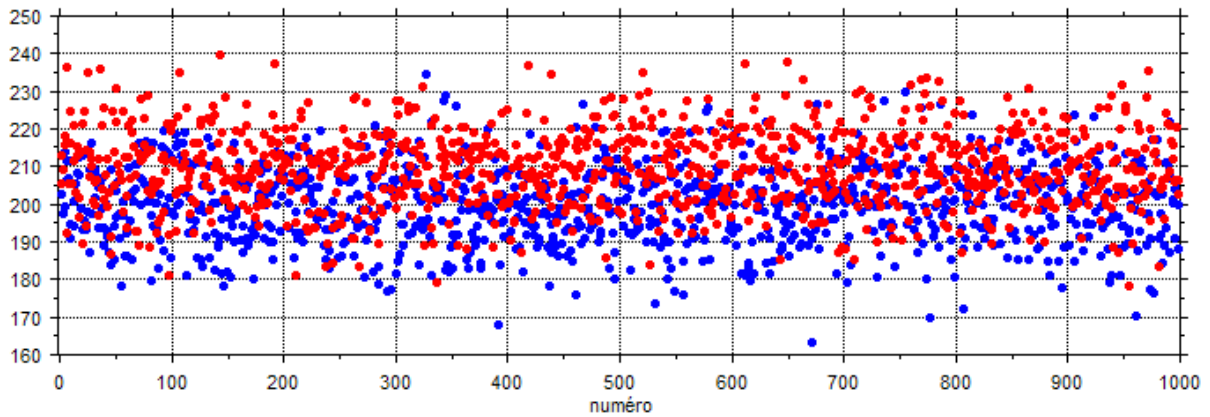
Dans le tableau 2, les modèles des deux expériences sont différents : pour l'expérience 1 c'est la loi est $N(200,30)$, et pour l'expérience 2, la loi $N(210,30)$. Les moyennes empiriques sur deux séries de 10 simulations diffèrent de 6,8 unités, c'est-à-dire moins que dans les simulations précédentes et pourtant on est parti de modèles distincts !

	Exp1	Exp2
Moy.	207,7	214,5
Dév. Std	38,2	32,9
Nombre	10	10
Minimum	120,5	171,7
Maximum	240,7	289,1
Médiane	225,2	209,6

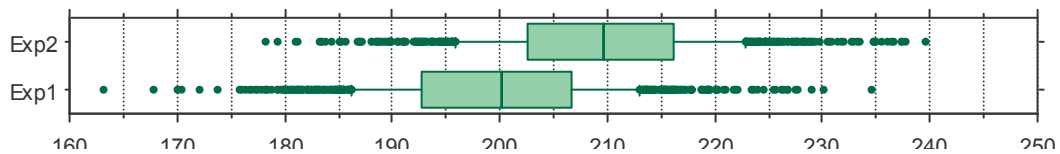
Tableau 2 : simulations

Autrement dit, on ne peut pas conclure à l'effet d'un facteur (qui se traduirait ici par une influence sur la moyenne théorique) à partir de la seule différence des moyennes.

On notera cependant qu'avec plus d'expériences (figures 2), et avec des données moins variables (1000 simulations de $N(200,10)$ et de $N(210,10)$), il devient net tant au niveau de la représentation des points que celui du diagramme en boîte, qu'un paquet des données est légèrement décalé par rapport à l'autre



	Moy.	Dév. Std	Nombre	Minimum	Maximum	Médiane
Exp1	199,8	10,4	1000	163,1	234,6	200,1
Exp2	209,6	10,3	1000	178,1	239,6	209,6



Figures 2 : simulations. Au dessus de 220, il n'y a presque que des points rouges, au dessous de 190, presque que des points bleus.

Tenir compte de la variabilité propre des phénomènes (mesurée par l'écart-type par exemple) et du nombre des données dont on dispose pour interpréter la différence entre les moyennes empiriques semble pertinent, mais comment le faire ? La statistique mathématique permet d'établir des formules permettant de conclure que deux séries de mesures ont *de fortes chances* de ne pas relever de modèles identiques. On dit aussi que le facteur qui a varié entre les deux expériences a ou non un effet *significatif*. La philosophie sous jacente est qu'on ne peut attribuer les différences observées entre les moyennes des deux séries à la seule la fluctuation d'échantillonnage et qu'une raison autre que cette fluctuation est en cause. Les formules employées sont complexes, elles font intervenir les moyennes et écarts-type des séries de mesures ainsi que leur nombre ; nous ne les écrivons pas ici, notre propos étant simplement d'en faire sentir la nécessité sans pour autant entrer dans la technique.

Evidemment, certaines situations (par exemple, celle de la figure 3, simulations avec $N(150,30)$ et $N(200,30)$) pourraient se passer de calculs statistiques compliqués. Mais il n'est pas clair de savoir où se situe la limite de ce qui est *convaincant ou non*, au vu des graphiques !

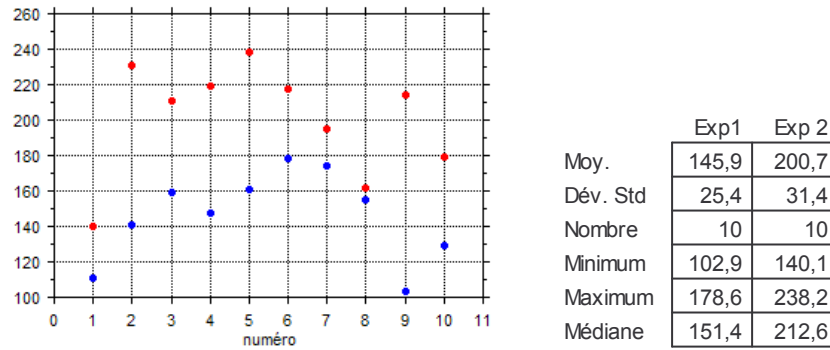
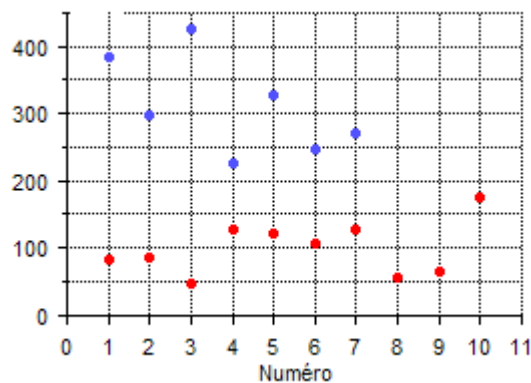


Figure 3 : simulations

III. Bonbon mentos et coca et cola

Revenons au coca cola et à des expériences réelles. 10 expériences ont été faites avec un morceau de sucre et 7 expériences avec des morceaux de la même boîte, mais réduits en poudre. Les formules statistiques confirment heureusement ! ce qui est ici évident au vu des données (figure 4) : la différence entre les moyennes ne peut être imputée à la seule variabilité du phénomène.



	Moy.	Dév. Std	Nombre	Minimum	Maximum	Médiane
Morceaux	99,9	37,7	10	47,0	177,0	96,0
poudre	311,6	67,5	7	227,0	427,0	297,0

Figure 4 : surpression limite dans des bouteilles de coca cola remplies à l'identique (voir diaporama), les unes (points rouges) après versement d'un sucre, les autres (points bleus), après versement de sucre en poudre.

L'expérience faite apporte une validation du rôle de la granularité du matériel utilisé. D'autres expériences concernant ce phénomène peuvent être mises en œuvre, notamment avec d'autres boissons gazeuses : le phénomène initial n'est propre ni au coca cola ni aux bonbons mentos.

On pourrait étudier quantitativement le lien entre surface et surpression, écrire les équations correspondantes et les valider expérimentalement, par exemple, en comparant la surpression avec un cube et un cube découpé en petits cubes¹ ; une fois ce lien connu, on pourrait se servir d'un dispositif analogue pour mesurer la granulométrie d'un solide.....

¹ On peut demander à des élèves comment varie la surface exposée au contact quand on découpe un cube d'arête a en cubes d'arêtes a/k .

